Nederlandse organisatie voor toegepast natuurwetenschappelijk onderzoek

Fysisch en Elektronisch Laboratorium TNO

Postbus 96864
2509 JG 's-Gravenhage
Oude Waalsdorperweg 63
's-Gravenhage

Telefax 070 - 328 09 61
Telefoon 070 - 326 42 21

TNO-rapport



rapport no.
FEL-90-A078

exemplaar no.

900044

titel

# Methoden voor voorraadbeheersing van repareerbare reservedelen: METRIC en enkele varianten.



auteur(s):

Ir. M.H. Franssen







rubricering

| | |
|---|---|
| titel | : ongerubriceerd |
| samenvatting | : ongerubriceerd |
| rapport | : ongerubriceerd |
| bijlagen | : ongerubriceerd |

| | |
|---|---|
| oplage | : 30 |
| aantal bladzijden | : 39 (incl.bijlagen excl. titel pag.) |
| aantal bijlagen | : 1 |
| datum | : augustus 1990 |





TNO

| | | |
|---|---|---|
| rapport no. | : | FEL-90-A078 |
| titel | : | Methoden voor voorraadbeheersing van repareerbare reservedelen: METRIC en enkele varianten. |
| auteur(s) | : | Mw. ir. M.H. Franssen |
| instituut | : | Fysisch en Elektronisch Laboratorium TNO |
| datum | : | augustus 1990 |
| hdo-opdr.no. | : | A88/KLu/624 |
| no. in iwp '90 | : | 702.2 |

SAMENVATTING (ONGERUBRICEERD)

In het kader van de opdracht A88/KLu/624 "Voorstudie naar de beheersing van materieel-logistieke processen" is de cursus "Spares management and modelling" van dr. C.C. Sherbrooke gevolgd.
In deze cursus werd een overzicht gegeven van verschillende voorraadbeheersingsmethodieken voor repareerbare reservedelen, gebaseerd op METRIC (multi-echelon technique for recoverable inventory control).
T dit rapport worden METRIC en uitbreidingen daarvan behandeld. Tevens wordt aangegeven waar verdere uitbreidingen mogelijk zijn.

| | | |
|---|---|---|
| report no. | : | FEL-90-A078 |
| title | : | Methodes for repairable item inventory control: METRIC and some variants |
| author(s) | : | Mw. ir. M.H. Franssen |
| institute | : | TNO Physics and Electronics Laboratory |
| date | : | August 1990 |
| NDRO no. | : | A88/KLu/624 |
| no.in pow '90 | : | 702.2 |

ABSTRACT (UNCLASSIFIED)

Within the scope of an Orientation on materiel-logistical processes within the RNLAF the course "*Spares management* and modelling" by dr. C.C. Sherbrooke has been attended This course dealt with inventory control methods for repairable items, based on METRIC (multi-echelon technique for recoverable inventory control).
The purpose of this report is to give the reader an insight in metric and some of its variants. It also points out a few possible further extensions.

INHOUD

## 1 INLEIDING

Van 25 tot en met 29 september is door Drs. D.J. Stolk en Mw.ir. M.H. Franssen in Exeter (Groot-Brittannië) de cursus "Spares Management en Modelling" gevolgd. Deze cursus werd gegeven door Dr. C.C. Sherbrooke op uitnodiging van Exeter University Centre for Management of Industrial Reliability and Cost Effectiveness (MIRCE). Het hoofdonderwerp van de cursus was het model METRIC (Multi-Echelon Technique for Recoverable Inventory Control). METRIC is ontworpen voor de United States Air Force en bepaalt de optimale hoeveelheid repareerbare reservedelen op vliegbases en (reparatie-) depots.
In dit rapport worden de belangrijkste delen van dat model behandeld en worden recente ontwikkelingen toegelicht. Het rapport is geschreven met het doel de lezer een indruk te verschaffen in de werking van METRIC en zijn varianten; het beoogt derhalve niet een volledig uitputtende beschrijving te zijn.
Als inleiding worden belangrijke begrippen behandeld in hoofdstuk 2. Het Base Stockage Model -de voorloper van METRIC- wordt in hoofdstuk 3 behandeld. Daarna komt METRIC zelf aan de orde in hoofdstuk 4; het betreft hier de eerste vorm van METRIC (diverse bases, 1 depot, meerdere reservedelen). Vanuit METRIC kan de beschikbaarheid van een systeem dat is opgebouwd uit meerdere reservedelen, bepaald worden, zoals in hoofdstuk 5 besproken zal worden. In de hoofdstukken 6 en 7 worden twee uitbreidingen behandeld, te weten MOD-METRIC respectievelijk VARI-METRIC. Voor de volledigheid wordt in hoofdstuk 8 kort ingegaan op Dyna-METRIC, dat niet tijdens de cursus behandeld is. Het rapport zal afgesloten worden door het aangeven, in hoofdstuk 9, van een aantal mogelijke uitbreidingen die rechtstreeks afgeleid worden uit de restricties van de behandelde modellen.

## 2 BEGRIPSBEPALING

Om verwarring te voorkomen zullen hier enkele fundamentele begrippen behandeld worden.

Allereerst het begrip stock level. Hiervoor geldt de volgende expressie:
"stock level" = "on hand" + "on order" or "in repair" - "backorders"

waarbij
stock level = voorraad (streef-)niveau,
on hand = de werkelijke voorraad van het betreffende item in het magazijn,
on order = aantal items in bestelling, in geval van niet-repareerbare items (voor repareerbare items altijd 0),
in repair = aantal items in reparatie, in geval van repareerbare items (voor niet-repareerbare items altijd 0),
backorders = aantal exemplaren/stuks van een item dat niet direct geleverd kan worden (het aantal stuks in nalevering).
Hierbij geldt automatisch dat van de termen "on hand" en "backorders" minstens een van beide gelijk aan nul is.

Bij de bovenstaande expressie wordt uitgegaan van een afhandelingsproces voor repareerbare items, dat er als volgt uitziet (1 for replenischment):

(1) er is een aanvraag van een bepaald item en het te repareren item wordt ingeleverd,
(2) als er uit voorraad geleverd kan worden, wordt een werkend item geleverd; anders wordt de aanvraag omgezet in een nalevering,
(3) het repareerbare maar defecte item wordt na een zekere reparatietijd weer functionerend,
(4) als er een nalevering is wordt hieraan voldaan; als er geen naleveringen meer zijn wordt het gerepareerde item aan de voorraad toegevoegd.

Bij '1 for 1 replenishment' (als er een item vervangen moet worden, wordt dit direct gedaan; dus geen batching) is het stock level constant. De notatie van stock level zal in het vervolg $s_{ij}$ zijn (waarbij i aangeeft over welke basis het gaat en j over welk item).

Bij alle modellen die in dit verslag behandeld zullen worden, wordt uitgegaan van een 'steady-state' situatie; dat wil zeggen dat de vraagverdeling en het gemiddelde ervan, evenals de reparatieduur, constant blijven.
De vraag per dag op basis i naar item j wordt aangegeven met $d_{ij}$.
Laat $P[d_{ij}=d]$ de kans zijn dat de vraag naar item j op basis i op een bepaalde dag d is. In alle modellen die besproken worden, wordt uitgegaan van een Poisson vraagverdeling. Volgens de stelling van Palm (zie o.a.[5]) geldt dat wanneer de aankomsten (dus de vraag naar items en de aanbieding ter reparatie) Poisson-verdeeld zijn, het aantal items in reparatie (in de pijplijn) ook Poisson-verdeeld is, onafhankelijk van de verdeling van de reparatieduur. In bijlage A wordt de stelling van Palm uitgebreid behandeld. In latere modellen wordt afgeweken van de stelling van Palm omdat door allerlei verstoringen de pijplijn niet meer Poisson maar negatief binomiaal verdeeld verondersteld wordt.
Laat $r_{ij}$ de gemiddelde reparatietijd van item j op basis i zijn. Het aantal items j op basis i in reparatie $z_{ij}$ wordt ook wel de pijplijn van item j op basis i genoemd. Volgens de stelling van Palm is de pijplijn gelijk aan $r_{ij} \cdot d_{ij}$.

Onder fill-rate wordt verstaan de fractie van de aanvragen van een bepaald item waaraan direct voldaan kan worden. Laat F(s) de fill-rate zijn van een bepaald item met stock level s en pijplijn z, dan:

$$F(s) = P[\ z=0\ ] + P[\ z=1\ ] + \ldots + P[\ z=s-1\ ] = \sum_{k=0}^{s-1} P[\ z=k\ ]$$

Het begrip fill-rate werd en wordt veel gebruikt als een soort servicegraad. Het wordt hier alleen voor de volledigheid aangegeven maar zal verder niet gebruikt worden.

Laat B(s) het verwachte aantal naleveringen van een bepaald item met stock level s zijn, waarbij z de pijplijn is:

$$B(s) = P[z=s+1] + 2 \cdot P[z=s+2] + 3 \cdot P[z= s+3] + \ldots$$

$$= \sum_{k} k \cdot P[z=s+k] \overset{(\text{Poisson})}{=} \sum_{n>s} \frac{e^{-z} \cdot (z)^n}{(n-s)!}$$

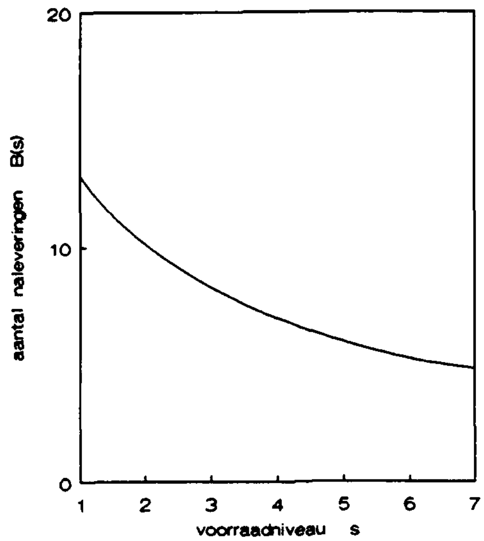
Er geldt dus ook:
als s=0 dan B(s) = z (=pijplijn).
(De verwachting van de Poisson-verdeling is gelijk aan z.)

# 3 BASE STOCKAGE MODEL

Het eenvoudigste model dat behandeld wordt is het Base Stockage Model (BSM) ([5],[11]): een single-site, single-indenture (geen onderscheid tussen hoofd- en subcomponenten), multi-item model. Dit model bepaalt de streefvoorraad van de gevoerde items, bij een gegeven budget (voor voorraden), zodanig dat het totaal verwachte aantal naleveringen zo klein mogelijk is.
De randvoorwaarden van het base stockage model zijn ([3],[5]):

-1- De vraag naar een bepaald item over de tijd is Poisson-verdeeld met een vast gemiddelde ('steady-state');
-2- Alle items worden gerepareerd; er worden geen items weggedaan;
-3- Er is geen wachtrij voor de reparatie en de reparatie begint onmiddellijk nadat het item bij de reparatieplaats komt (geen 'batching'); er is voldoende reparatiecapaciteit;
-4- Alle items zijn even essentieel;
-5- Er worden geen items gekannibaliseerd (er worden geen items uit vliegtuigen gehaald die toch al een storing hadden);
-6- Het vervangen van een defect item door een werkend item (indien dit voorhanden is) kost geen tijd.

De oplossingsmethodiek die gebruikt wordt in het BSM heet marginale analyse. Daarbij wordt geprobeerd het budget zo optimaal mogelijk te besteden: er wordt bekeken bij welk item de afname in aantal naleveringen per bestede gulden/geldeenheid maximaal is. Bij de initialisatie wordt de voorraad voor alle items nul gekozen. Daarna wordt voor ieder item de afname in aantal naleveringen gedeeld door de kosten van het item bepaald bij een voorraadtoename met één. Voor het item waarvoor dit quotiënt het grootst is wordt de streefvoorraad met één opgehoogd, mits het budget daardoor niet overschreden wordt. Deze procedure gaat zo door totdat men het budget besteed heeft.
Marginale analyse is alleen bruikbaar als de backorderfunctie convex is, dus als de afname in het aantal naleveringen (bij het toevoegen van een




Figuur 1. Het aantal naleveringen als functie van het voorraadniveau.

item aan de voorraad) kleiner wordt naarmate de voorraad groter wordt (zie figuur 1), dus als B(s) - B(s+1) kleiner wordt als s groter wordt (de indices voor de diverse items zijn weggelaten omdat ze overal hetzelfde zijn).
Een voordeel van marginale analyse is, dat je tijdens de iteratie een kosten-effectiviteitscurve ontwikkelt van kosten versus aantal naleveringen. Ieder punt op de kosten-effectiviteitscurve minimaliseert kosten bij een gegeven naleveringsrestrictie (backorderconstraint) en ieder punt op de curve minimaliseert het aantal naleveringen voor een specifieke kostenconstraint.

Het bovenstaande verhaal ziet er wiskundig als volgt uit:
(omdat het hier slechts één basis betreft kan de index i die aangeeft over welke basis het gaat weggelaten worden)

Probleemformulering:

$$\left[\begin{array}{ll} \min\limits_{\underline{s}} \sum\limits_{j=1}^{J} B_j(s_j), & \underline{s} = (s_j)_j \ , \ j = 1,2,\ldots,J; \\ \text{o.v.d.} \sum\limits_{j=1}^{J} s_j \cdot c_j \leq C, & j = 1,2,\ldots,J. \end{array}\right.$$

Hierbij is $c_j$ de aanschafkosten van item j en C het totale budget.

Oplossingsmethodiek ([11]):

(1) Kies $\underline{s} = (0,\ldots,0)$,

(2) Bepaal $j' \in \{ 1,2,\ldots J \}$ z.d.d.

$$\frac{B_j(s_j)-B_j(s_j+1)}{c_j} \quad \text{maximaal is,}$$

(3) indien

$$\sum_j s_j \cdot c_j + c_{j'} > C, \text{ dan STOP,}$$

(4) stel $s_{j'} = s_{j'} + 1$ en ga terug naar (2)

Zoals al eerder gezegd is deze oplossingsmethodiek alleen bruikbaar als de backorderfunctie convex is, dus:
te bewijzen: B(s) is convex.

Bewijs:

Er wordt gebruik gemaakt van de definitie van convexiteit:

B(s) is convex <=> $\forall_{s=0,1,..}$: $(B(s)-B(s+1)) \geq (B(s+1)-B(s+2))$

Verder geldt dat d en dus (volgens de stelling van Palm) ook z Poisson verdeeld is, dus:

$$B(s) - B(s+1) = P[z=s+1] + P[z=s+2] + \ldots = P[z\geq s+1]$$

$$B(s+1)-B(s+2) = P[z=s+2] + P[z=s+3] + \quad = P[z\geq s+2]$$

$$(B(s)-B(s+1)) - (B(s+1)-B(s+2)) = P[z\geq s+1] - P[z\geq s+2]$$

$$= P[z=s+1] \geq 0$$

Dit geldt voor alle $s\geq 0$ dus:

$\forall_{s=0,1,..}$: $(B(s)-B(s+1)) \geq (B(s+1)-B(s+2))$ dus:

B(s) is convex.

## 4 METRIC: A MULTI-ECHELON TECHNIQUE FOR RECOVERABLE INVENTORY CONTROL

In het nu volgende gedeelte wordt er uitgegaan van een 2-echelons-structuur: er zijn I bases (die verschillend kunnen zijn) en er is 1 depot voor alle J items.
Het doel is het totaal verwachte aantal naleveringen op de bases te minimaliseren door optimale allocatie van reservedelen over de bases en het depot. Het aantal naleveringen op het depot wordt niet in de doelfunctie opgenomen omdat dit in tegenstelling tot het aantal naleveringen op de bases alleen indirect van invloed is op de 'system availability' (i.e. de beschikbaarheid van bijvoorbeeld een vliegtuig).

METRIC ([7]) is een uitbreiding van BSM en heeft een paar extra voorwaarden ([3],[5]):

-7- Er is geen onderlinge uitwisseling van reservedelen tussen bases: alle reservedelen komen van het depot;
-8- Reparatie op het depot begint onmiddellijk nadat het item op het depot aangekomen is;
-9- De totale vraag over de verschillende bases volgt een bepaalde vraagverdeling.

Probleemformulering:

$$\left[\begin{array}{ll} \min\limits_{\underline{s}} \sum\limits_{i=1}^{I} \sum\limits_{j=1}^{J} B_{ij}(\, s_{ij}\,), & \underline{s} = (s_{ij})_{ij}\,, \\ & i = 0,1,\ldots,I \\ & j = 1,2,\ldots,J; \\ \text{o.v.d.} \sum\limits_{j=1}^{J} (\, c_j \cdot \sum\limits_{i=0}^{I} s_{ij}\,) \le C & \end{array}\right.$$

AFSPRAAK: $i=0$ is het depot,
$i=1,\ldots,I$ zijn de bases.

Enige uitleg bij deze formulering is op zijn plaats. Hoewel alleen het aantal naleveringen op de bases geteld wordt en dit direct afhankelijk is van het voorraadniveau van het betreffende item op de basis, is ook het voorraadniveau van dat item op het depot van invloed op het aantal naleveringen op de basis. In de probleemformulering is dit terug te vinden in de matrix $\underline{s}$, waarin ook het depotvoorraadniveau is opgenomen. Er wordt dus gezocht naar een matrix $\underline{s}$ waarvoor het totaal aantal naleveringen op de basis minimaal is.
In de oplossingsmethodiek die hierna gegeven zal worden wordt als volgt te werk gegaan: eerst wordt de depotvoorraad vast gekozen, te beginnen bij nul. Later wordt de nu volgende cyclus doorlopen voor een depotvoorraad ter hoogte één en zo verder. Vervolgens wordt met behulp van marginale analyse het aantal naleveringen per item bepaald bij verschillende totale basisvoorraadniveaus, waarbij deze voorraad optimaal gealloceerd is over de verschillende bases. Laat het depotvoorraadniveau bijvoorbeeld één zijn en de over de bases te verdelen voorraad is zes, dan wordt bepaald op welke bases deze zes items het beste kunnen komen te liggen. Bijvoorbeeld bij de verdeling 3 op basis 1, 2 op basis 2 en 1 op basis 3 is het totaal aantal naleveringen het kleinst. Daarna wordt, ook met marginale analyse, $B_j(\underline{s}_j)$ bepaald, met $\underline{s}_j = (s_{oj}, S_{1j}\ S_{ij})^T = (s_{ij})_i$ $i = 0,1,\ldots,I$. Dit wil zeggen dat er nu een afweging wordt gemaakt tussen voorraad op het depot of op de bases. Bij een totaalvoorraad (depot plus bases) van 7 wordt een afweging gemaakt tussen 0 op het depot en 7 op de bases, één op het depot en 6 op bases enz.. Die verdeling waarvoor het totaal aantal naleveringen op de bases het laagst is wordt gekozen. Op deze manier kan voor elk item j de backorderfunctie bepaald worden. Deze geeft aan wat bij een totaal streefniveau s het minimum aantal naleveringen op de bases is. Bij deze waarde hoort wel een vector $\underline{s}_j$, die aangeeft hoe de s exemplaren van item j over de bases en het depot verdeeld zijn.
Nu de backorderfunctie voor ieder item j bekend is, is het multi-echelon probleem eigenlijk teruggebracht tot een single-site probleem. Dit probleem is al behandeld in het vorige hoofdstuk, waarbij ook weer van marginale analyse gebruik gemaakt wordt.

Oplossingsmethodiek ([11]):

(1) Bepaal de gemiddelde vraag per dag naar item j op het depot:

$$d0j,\ \sum_{i=1}^{I} dij\ (1\text{-}pij),\ j=1,2,\ldots,J$$

en bepaal de gemiddelde depot-pijplijn $z_{0j} = d_{0j} \cdot r_{0j}$, $j=1,2,\ldots J$.

(2) Neem $s_{0j}=0$ voor $j=1,2,\ldots J$.

(3) Bepaal $d_{ij} \cdot R_{ij}$, de verwachte pijplijnen voor items j komende van bases i, voor alle i (i>0) en j met behulp van:

$$d_{ij} \cdot R_{ij}(s_{0j}) = d_{ij} \{ p_{ij} \cdot r_{ij} + (1 - p_{ij}) \cdot (O_{ij} + B_{0j}(s_{0j})/d_{0j}) \}$$

$R_{ij}$ is de totale reparatieduur van item j afkomstig van basis i,
$p_{ij}$ is de kans dat item j op basis i gerepareerd wordt,
$r_{ij}$ is de reparatieduur als item j op basis i gerepareerd wordt,
$O_{ij}$ is de 'order- and shiptime' van item j van het depot naar basis i, als het depot item j direct kan leveren.

(4) Bepaal $B_{ij}(s_{ij})$ voor $i=1,\ldots,I$ en verdeel de items optimaal over de bases m.b.v. marginale analyse (nu wordt een afweging gemaakt naar $B_{ij}(s_{ij})$-$B_{ij}(s_{ij}$-1) voor j vast en i tussen 1 en I). Omdat item j vast is, hoeven er geen aanschafkosten meegenomen te worden.

(5) Als $s_{0j}$ 'groot genoeg' dan verder met stap (6), anders $s_{0j}:=s_{0j}+1$ en terug naar stap (3).

(6) De optimale verdeling van items over de bases per depotvoorraadniveau is nu bekend. Vervolgens kan $B_j(\underline{s}_j)$ worden bepaald en de optimale verdeling (naar minimum aantal naleveringen op de bases) van $s_j$ items over bases en depot.

(7) Nu $B_j(\underline{s}_j)$ bekend is voor alle j kan met behulp van marginale analyse zoals bij de BSM oplossingsmethodiek de oplossing gevonden worden.

## 5 SYSTEEMBESCHIKBAARHEID

Met behulp van METRIC kan worden bepaald hoeveel er van een bepaald item j op basis i op voorraad moet worden gelegd. Bij dit voorraadniveau $s_{ij}$ hoort een verwacht aantal naleveringen $B_{ij}(s_{ij})$. Het begrip 'verwachte aantal naleveringen' spreekt echter niet tot de verbeelding. Het begrip systeembeschikbaarheid (system availability) daarentegen des te meer, waarbij onder systeembeschikbaarheid wordt verstaan: de kans dat van het systeem (bijvoorbeeld een vliegtuig) alle onderdelen (items) aanwezig zijn en functioneren. Het lijkt dus logischer om de systeembeschikbaarheid te maximaliseren dan om het verwachte aantal naleveringen te minimaliseren. Er zal nu worden aangetoond dat dit op hetzelfde neerkomt; dus dat de systeembeschikbaarheid maximaal is als het aantal naleveringen minimaal is (bij een gegeven budget), en vice versa ([11]).

Laat $A_i$ de vliegtuigbeschikbaarheid op basis i zijn en
laat $N_i$ het totaal aantal vliegtuigen op basis i zijn.
De systeembeschikbaarheid op basis i is nu (laat alle indices i weg, want basis i is toch vast gekozen):

$$A = ( 1-B_1/N )\cdot( 1-B_2/N )\cdot \ldots \cdot( 1-B_J/N )$$

De systeembeschikbaarheid A kan gemaximaliseerd worden door $B_j$ aan te passen.

EIGENSCHAP 1: $\log(1-x) = -x - x^2/2 - \ldots$ als $x>0$
dus $\log(1-x) \approx -x$ als x klein genoeg.

EIGENSCHAP 2: een functie en zijn logaritme bereiken hun maximum in hetzelfde punt.

Dus:

$$\log (A) = \log( 1-B_1/N )+\log( 1-B_2/N )+ \ldots +\log( 1-B_J/N )$$

Als nu $1-B_j/N$ klein voor alle j dan (EIGENSCHAP 1):

$$\log(A) = -(B_1 + B_2 + \ldots + B_J)/N$$

Hieruit volgt dat de systeembeschikbaarheid A maximaal is wanneer de som van het verwachte aantal naleveringen minimaal is (EIGENSCHAP 2), wanneer dat aantal relatief klein is ten opzichte van het totaal aantal vliegtuigen/systemen.

## 6 MOD-METRIC

In METRIC zijn alle reservedelen even belangrijk (zie randvoorwaarde (4) hoofdstuk 3). Veel defensiesystemen (o.a. F-16 jachtvliegtuigen) zijn echter modulair opgezet. Dit betekent dat een systeem bestaat uit een aantal end-items, ook wel Line Repairable Units (LRU's) genoemd. Als er een storing in een LRU optreedt kan deze defecte LRU vrij gemakkelijk vervangen worden door een werkende LRU. Dit heet 'repair by replacement'. Een LRU is meestal opgebouwd uit een aantal Shop Repairable Units (SRU's). Ook hiervoor geldt 'repair by replacement'.
In METRIC wordt geen onderscheid gemaakt tussen LRU's en SRU's. Dus worden naleveringen op een SRU even kwalijk gevonden als naleveringen op een LRU, terwijl dit in de praktijk verschilt: wanneer er een backorder op een motor is, wil dit zeggen dat er een vliegtuig aan de grond staat omdat er geen motor voorhanden is. Maar als er een backorder op een motoronderdeel is, wil dit zeggen dat de reparatie van de motor vertraagd wordt maar niet noodzakelijk dat er een vliegtuig aan de grond staat. In METRIC worden de motor en het motoronderdeel op één lijn getrokken hoewel hun invloed op de vliegtuigbeschikbaarheid heel anders is.
MOD-METRIC ([6]) is een model met een 'multi-indenture' structuur. Dit wil zeggen dat in MOD-METRIC onderscheid wordt gemaakt tussen end-items (LRU's) en componenten (SRU's).
Het doel van MOD-METRIC is het minimaliseren van het verwachte aantal naleveringen op de LRU's op de bases bij een gegeven budget (voor de aanschaf van zowel LRU's als SRU's).
Er wordt uitgegaan van de randvoorwaarden zoals deze ook voor METRIC gelden, waarbij (4) vervalt en toegevoegd worden ([3],[5]):

-10- Elke storing in een LRU is te wijten aan slechts één SRU-storing;
-11- Iedere SRU behoort tot slechts één LRU.

Probleemformulering:

$$\left[\begin{array}{ll} \min\limits_{\underline{s},\underline{t}} \sum\limits_{i=1}^{I} \sum\limits_{j=1}^{J} B_{ij}(\, s_{ij}, \underline{t}_{ij}\, ), & \underline{s} = (s_{ij})_{ij}\, , \\ & \underline{t} = (t_{ijk})_{ijk}\, ,\ \underline{t}_{ij} = (t_{ijk})_{k}\, , \\ & i = 0,1,\ldots,I, \\ & j = 1,2,\ldots,J, \\ & k = 1,2,\ldots,K_j; \\ \text{o.v.d. } \sum\limits_{j=1}^{J} \Big( \sum\limits_{k=1}^{K_j} \big( c_{jk} \cdot \sum\limits_{i=0}^{I} t_{ijk} \big) \Big) + \sum\limits_{j=1}^{J} \big( c_j \cdot \sum\limits_{i=0}^{I} s_{ij} \big) \le C & \end{array}\right.$$

Hierbij staat $t_{ijk}$ voor het voorraadniveau van SRU k van LRU j op basis i; LRU j bestaat uit $K_j$ verschillende SRU's.
Evenals bij METRIC geldt hier dat het aantal naleveringen alleen op de basis geteld wordt, maar dat dit wel afhankelijk is van het voorraadniveau op het depot (zie hoofdstuk 4). Een soortgelijke opmerking is ook van toepassing op SRU's: het aantal naleveringen op SRU's wordt niet geminimaliseerd, maar het voorraadniveau van SRU's is wel van invloed op het aantal naleveringen aan LRU's. Vandaar dat zowel over $\underline{s}$ als $\underline{t}$ geminimaliseerd wordt.

De oplossingsmethodiek komt overeen met die van METRIC. Alleen is het bepalen van de vraag en de pijplijnen voor end-items iets lastiger. Immers de pijplijn van een LRU op de basis is afhankelijk van de SRU-pijplijn op basis en depot en de LRU-pijplijn op het depot. Met deze LRU-pijplijn kan dan de backorderfunctie worden bepaald van de LRU's en SRU's. Op de oplossingsmethodiek zal hier niet meer verder worden ingegaan. Wel zal nader worden ingegaan op het bepalen van de pijplijnen ([11]).

Alvorens de pijplijn te bepalen zal de vraag naar het item (LRU of SRU) bekend moeten zijn.

We bekijken LRU j met zijn SRU's 1 t/m $K_j$.

Laat $d_{ijk}$ de vraag naar SRU k van LRU j op basis i zijn.
Laat $p_{ijk}$ de kans zijn dat een storing in SRU k van LRU j op basis i op die basis gerepareerd wordt.
Laat $q_{ijk}$ de kans zijn dat een storing in LRU j op basis i het gevolg is van een storing in SRU k (de som van alle $q_{ijk}$'s over k is dan 1).

De vraag op de basis naar LRU j is bekend: $d_{ij}$.

De vraag naar SRU k van LRU j op basis i is:

$$d_{ijk} = d_{ij} \cdot p_{ij} \cdot q_{ijk},$$

is dus de gelijk aan de vraag naar LRU j op de basis (is het aantal malen dat er een storing in LRU j optreedt) maal de kans dat SRU j op basis i gerepareerd wordt maal de kans dat de storing aan SRU k ligt.

De vraag op het depot naar LRU j is:

$$d_{0j} = \sum_{i=1}^{I} d_{ij} \cdot (1-p_{ij})$$

is dat deel van de over de bases gesommeerde vraag naar LRU j dat niet op de bases zelf gerepareerd wordt.

De vraag op het depot naar SRU k is:

$$d_{0jk} = \sum_{i=1}^{I} d_{ijk} \cdot (1-p_{ijk}) + d_{0j} \cdot q_{0jk}$$

is dat deel van de totale vraag naar SRU k dat niet op de bases gerepareerd wordt plus de vraag naar SRU k ten gevolge van reparatie van LRU's op het depot.

Nogmaals:

$d_{ij}$ is bekend,
$d_{ijk} = d_{ij} \cdot p_{ij} \cdot q_{ijk}$,

$$d_{0j} = \sum_{i=1}^{I} d_{ij} \cdot (1 - p_{ij})$$

$$d_{0jk} = \sum_{i=1}^{I} d_{ijk} \cdot (1 - p_{ijk}) + d_{0j} \cdot q_{0jk}$$

Schematisch kan de opbouw van de vraag naar SRU's op de basis als volgt worden weergegeven (2 echelons):

$$\begin{tikzcd}
\text{LRU vraag op de basis} \arrow[r] \arrow[d] & \text{LRU vraag op het depot} \arrow[d] \\
\text{SRU vraag op de basis} \arrow[r] & \text{SRU vraag op het depot}
\end{tikzcd}$$

Om het aantal naleveringen te kunnen bepalen moeten de pijplijnen bekend zijn. Voor het afleiden van de pijplijnen kan eenzelfde soort schema worden opgesteld:

$$\begin{tikzcd}
\text{LRU pijplijn op de basis} & \text{LRU pijplijn op het depot} \arrow[l] \\
\text{SRU pijplijn op de basis} \arrow[u] & \text{SRU pijplijn op het depot} \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Er wordt uitgegaan van een Poisson-verdeelde vraag.
($z_{ijk}$ is de pijplijn op basis i van SRU k van LRU j)

De verwachte SRU pijplijn op het depot is:

$z_{0jk} = d_{0jk} \cdot r_{0jk}$,

waarbij $r_{0jk}$ de gemiddelde reparatietijd van SRU k op het depot is als er reservedelen beschikbaar zijn.

De LRU pijplijn op het depot is gelijk aan het aantal LRU's in reparatie als er LRU-reservedelen beschikbaar zijn plus het aantal LRU's in reparatie waarbij gewacht moet worden op de nalevering van een SRU (dus als de reservedelen niet direct beschikbaar zijn):

$$z_{0j} = d_{0j} \cdot r_{0j} + \sum_{k=1}^{K_j} (d_{0j} \cdot q_{0jk}/d_{0jk}) \cdot B_{0jk}(t_{0jk})$$

De SRU pijplijn op de basis is:

$$z_{ijk} = d_{ijk}((1-p_{ijk}) \cdot O_{ijk} + p_{ijk} \cdot r_{ijk}) + (d_{ijk}(1-p_{ijk})/d_{0jk}) \cdot B_{0jk}(t_{0jk})$$

Waarbij:

$d_{ijk}(1-p_{ijk}) \cdot O_{ijk}$ is de pijplijn ten gevolge van wachten op een SRU k dat van het depot moet komen als SRU k op het depot aanwezig is.

$d_{ijk} \cdot p_{ijk} \cdot r_{ijk}$ is de pijplijn ten gevolge van wachten op reparatie op de basis als de benodigde reservedelen (SRU k) aanwezig zijn.

Als er geen reservedelen voorhanden zijn:

$d_{ijk}(1-p_{ijk})/d_{0jk}$ is de fractie van de depotreparaties (SRU k) dat rechtstreeks van basis i afkomstig is.

$(d_{ijk}(1-p_{ijk})/d_{0jk}) \cdot B_{0jk}(t_{0jk})$ is de vertraging op het depot op de reparatie van SRU k (van LRU j) voor basis i.

En uiteindelijk kan dan de LRU pijplijn op de basis bepaald worden:

$$z_{ij} = d_{ij} \cdot ( (1-p_{ij}) \cdot O_{ij} + p_{ij} \cdot r_{ij})$$

$$+ (d_{ij}(1-p_{ij})/d_{0j}) \cdot B_{0j}(s_{0j},t_{0j}) + \sum_{k=1}^{K_j} B_{ijk}(t_{ijk})$$

Waarbij:

$d_{ij}(1-p_{ij}) \cdot O_{ij}$ is de pijplijn ten gevolge van wachten op een reservedeel van het depot als het reservedeel op het depot aanwezig.

$d_{ij} \cdot p_{ij} \cdot r_{ij}$ is de pijplijn ten gevolge van wachten op reparatie op de basis als de benodigde reservedelen (in dit geval vnl. SRU's) aanwezig zijn.

Als er geen reservedelen voorhanden zijn:

$d_{ij}(1-p_{ij})/d_{0j}$ is de fractie van de depotreparaties (LRU j) dat rechtstreeks van basis i afkomstig is.

$(d_{ij}(1-p_{ij})/d_{0j}) \cdot B_{0j}(s_{0j},t_{0j})$ is de vertraging op de LRU-reparatie op het depot voor de LRU's van basis i.

$\Sigma B_{ijk}(s_{ijk})$ is de vertraging ten gevolge van SRU reparaties op de basis.

# 7 VARI-METRIC

Alhoewel MOD-METRIC ten opzichte van METRIC een verbetering is, zijn er nog genoeg punten die voor verdere verbetering in aanmerking komen. Eén van die punten was dat, wanneer de vraag weliswaar Poisson-verdeeld is maar met een gemiddelde ($\mu$) dat varieërt, dat tot gevolg heeft dat de variatiecoëfficiënt ($\sigma^2/\mu$) van de vraag groter dan één wordt (bij de Poisson-verdeling geldt: $\sigma^2/\mu=1$). Een tweede bezwaar was dat als de vraag Poisson-verdeeld is, de variatiecoëfficiënt van de backorderverdeling groter dan één wordt.
VARI-METRIC ([8]) gaat dan ook niet langer meer uit van de stelling van Palm die zegt dat wanneer de vraag Poisson-verdeeld is, de pijplijn dat ook is. In het geval van meerdere indentures kunnen er wachttijden optreden voordat met reparatie kan worden begonnen omdat onderdelen (SRU's) niet beschikbaar zijn vanwege reparatie. Uit Bijlage A blijkt dat de stelling van Palm uitgaat van oneindig veel servers (vgl. oneindige reparatiecapacateit) en daardoor geen wachttijden kent. Uit resultaten van simulaties verricht door Sherbrooke ([11]), is gebleken dat de 'oneindig veel servers'-aanname ('ample-repairmen' assumption) niet langer reëel is bij multi-indenture items. Vanwege een betere aansluiting gaat VARI-METRIC uit van een negatief-binomiale pijplijn-verdeling en backorder-verdeling. De verdelingsfunctie van de negatief-binomiale verdeling ziet er als volgt uit:

$$f(x) = \binom{n+x+1}{x} \cdot p^n \cdot (1-p)^x, \qquad \left(\mu = n \cdot \frac{1-p}{p}\ ,\quad \iota^2 = n \cdot \frac{1-p}{p^2}\right)$$

Het doel van VARI-METRIC is hetzelfde als dat van MOD-METRIC, namelijk het minimaliseren van het aantal naleveringen op LRU's op de bases bij een gegeven budget.
Ook de oplossingsmethodiek blijft hetzelfde, alleen worden nu apart de variantie van de pijplijnen en het aantal naleveringen bepaald omdat

deze niet meer automatisch gelijk zijn aan de verwachtingswaarde, zoals bij MOD-METRIC is aangenomen.
Uit simulaties van Sherbrooke ([11]) wordt duidelijk dat het aantal naleveringen zoals dat door METRIC of MOD-METRIC bepaald wordt erg laag is in vergelijking tot de simulatieresultaten (factor 1/u). De resultaten van VARI-METRIC daarentegen, benaderen de simulatieresultaten vrij nauwkeurig.

# 8 DYNA-METRIC

Alle voorgaande modellen hebben twee tekortkomingen. Ten eerste is het gebruik van 'verwachte aantal naleveringen' niet erg geschikt om: het maximaal haalbare aantal missies (vluchten in oorlogstijd) aan te geven: (ook wel operationele beschikbaarheid genoemd). Ten tweede zijn de modellen alleen van toepassing in een 'steady-state' omgeving en zodoende niet bruikbaar in geval van oorlog terwijl deze modellen juist voor defensie ontwikkeld zijn.
Dyna-METRIC is ontwikkeld om een dynamisch model te hebben dat operationele criteria (bijv. combat capability) als prestatie-indicator hanteert. Het model kan gekarakteriseerd worden als een multi-echelon, multi-indenture, multi-item, stochastisch model.
Het belangrijkste doel van Dyna-METRIC is verlaging van de 'mission capability' als gevolg van te korten aan reservedelen te voorkomen.
Dyna-METRIC bepaalt van ieder reservedeel de gemiddelde pijplijngrootte. De berekening van de pijplijnen verloopt zoals al eerder behandeld is, alleen is in Dyna-METRIC een Central Intermediate Repair Facility (CIRF) toegevoegd. Als er niet voldoende reservedelen zijn om de pijplijnen te vullen, zullen er naleveringen van bepaalde reservedelen ontstaan. Deze naleveringen kunnen een vliegtuig al dan niet aan de grond houden, afhankelijk van hoe essentieel het ontbrekende reservedeel is.
Dyna-METRIC berekent de totale beschikbaarheid van reservedelen en vertaalt deze informatie in de vliegtuigbeschikbaarheid en het aantal missies dat per dag gevlogen kan worden.
Geïnterreseerden worden verwezen naar [4] en [5].

# 9 DE RANDVOORWAARDEN

In dit hoofdstuk zullen de randvoorwaarden -1- tot en met -11- nagelopen worden. Daarbij zal geprobeerd worden aan te geven hoe deze restricties gerelaxeerd kunnen worden (indien mogelijk).

-1- De vraag naar een bepaald item is Poisson verdeeld met een vast gemiddelde ('steady state').

Wanneer de vraag Poisson verdeeld is met een vast gemiddelde heeft dit tot gevolg dat de variatiecoëfficiënt (=variantie/gemiddelde) gelijk aan 1 is. Als de gemiddelde vraag naar een bepaald item niet meer constant is, geldt ook niet langer meer dat de variatiecoëfficiënt gelijk aan 1 is. In dat geval zal het nodig zijn de vraag te voorspellen; immers een nauwkeurige voorspelling van de vraag is nodig om te bepalen hoeveel reservedelen er ingekocht moeten worden. Om een goede voorspelling van de vraag te kunnen geven is het noodzakelijk het gemiddelde èn de variantie van de vraag te schatten. Hiervoor zijn verschillende methodieken voorhanden ([9]).
Voor de voorspelling van de gemiddelde vraag kan gebruik gemaakt worden van 'moving average', 'single exponential smoothing' en hogere orde 'exponential smoothing' met trendvoorspelling. Voor het bepalen van de variatiecoëfficiënt kan hier gebruik gemaakt worden van een zgn. 'Powercurve'. Zo'n Powercurve ziet er als volgt uit: als M de schatting van het gemiddelde is en VMR staat voor de variatiecoëfficiënt (variance to mean ratio) dan is:

$$VMR = 1 + 0.14 \cdot \sqrt{M} \quad \text{(De waarde 0.14 is empirisch afgeleid).}$$

Een andere voorspellingstechniek, waarbij zowel het gemiddelde als de variantie voorspeld wordt is de zgn. Bayes-techniek. Hierbij wordt ervan uitgegaan dat de vraag Gamma-verdeeld is waarbij deze verdeling steeds aangepast wordt aan de nieuwe observaties. De initiële verdeling is

gebaseerd op schattingen voor het gemiddelde en de variantie waaruit de parameters van de Gamma-verdeling afgeleid worden. De nieuwe verdeling wordt afgeleid op basis van de Bayes-regel die betrekking heeft op voorwaardelijke kansen. Deze nieuwe verdeling is gebaseerd op de observatie gegeven de voorgaande 'oude' kansverdeling.
Volgens Sherbrooke ([9]) is exponential smoothing gecombineerd met de Powercurve het meest effectief. (Sherbrooke beweert ook dat de meest recente data de beste voorspelling geven.)

-2- Alle items worden gerepareerd; er worden geen items weggedaan.

Het is mogelijk dat veel items een zeer lange levensduur hebben doordat alle mogelijke storingen verholpen kunnen worden. Daarentegen is het zeer wel denkbaar dat verscheidene items slechts gedeeltelijk of in het geheel niet repareerbaar zijn of dat het repareren niet economisch verantwoord is. Met die items zal dan anders omgegaan moeten worden: er moeten exemplaren bijgekocht worden. De pijplijnen zijn dan ook afhankelijk van de kans dat een item gerepareerd kan worden en van de levertijd van nieuwe items. Het inkopen van nieuwe exemplaren is gebaseerd op de Wilson-ordergrootte-formule (economische ordergrootte) en een formule voor de bepaling van het 'reorder'-punt ([11]).

-3- Er is geen wachtrij voor de reparatie en de reparatie begint onmiddellijk nadat het item bij de reparatieplaats komt (geen 'batching'); er is voldoende reparatiecapaciteit.

De situatie waarin er geen wachrijen voor de reparatie zijn en waarin er voldoende reparatiecapaciteit is, komt overeen met de situatie in de wachtrijtheorie waarbij er oneindig veel loketten zijn en er daardoor geen wachtrijen zijn. Albright ([1]) noemt dit de 'ample-repairman' assumption en de 'no-queueing-for-repair' assumption. Deze vrij sterke restrictie is noodzakelijk voor het kunnen toepassen van de stelling van

Palm. Wat daarin gezegd wordt komt overeen met in de wachtrijtheorie: het aantal bezette loketten in een $M|G|\infty$ -wachtrij is Poisson-verdeeld (zie Bijlage A). Bij een beperkt aantal loketten (beperkte reparatiecapaciteit) geldt deze bewering niet meer en wordt het daardoor ook veel moeilijker om de gemiddelde pijplijn te bepalen. Op dit gebied zijn enkele publicaties verschenen waaronder [1] waarin o.a. een overzicht wordt gegeven van verschillende onderzoeken en [2].

-4- Alle items zijn even essentieel.

Het eerste wat over essentialiteit gezegd kan worden is ook al toegepast in uitbreidingen van METRIC: LRU's en SRU's zijn niet even essentieel en kunnen daardoor beter niet gelijk behandeld worden.
Ten tweede is het zeer wel mogelijk dat niet alle LRU's even essentieel zijn. Nachtvliegapparatuur (van een F-16) bijvoorbeeld, zal maar in een fractie (zeg f) van het totaal aantal vluchten gebruikt worden en is daardoor minder essentieel dan bijvoorbeeld de motor. Dit verschil zou meegenomen kunnen worden in de behandelde modellen door een nalevering op zo'n LRU een gewicht f mee te geven. Het toekennen van gewichten (tussen 0 en 1) zal tot gevolg hebben dat de systeembeschikbaarheid groter wordt; immers oorspronkelijk werd aan iedere LRU het gewicht 1 toegekend terwijl de 'nieuwe' gewichten kleiner of gelijk zijn aan 1. Dat heeft tot gevolg dat het totaal aantal naleveringen afneemt waardoor de systeembeschikbaarheid toeneemt.

-5- Er worden geen items gekannibaliseerd.

In [11] behandelt Sherbrooke op verschillende plaatsen kannibalisatie door resultaten van wel en niet kannibaliseren te vergelijken. Bij kannibalisatie neemt hij aan: er zijn n systemen 'down' als het grootste aantal naleveringen van een LRU op dat moment n is.

Als LRU1 bijvoorbeeld 10 naleveringen heeft en LRU2 8 naleveringen dan zijn er bij volledige kannibalisatie 10 vliegtuigen die LRU1 missen waarvan er 8 ook nog LRU2 missen. Zonder kannibalisatie zou het kunnen voorkomen dat 10 vliegtuigen LRU2 missen en 8 andere LRU2.
Met berekeningen en simulaties wordt aangetoond dat het METRIC-model, waarin geen rekening gehouden wordt met kannibalisatie, redelijk goed functioneert, ook wanneer in werkelijkheid veel gekannibaliseerd wordt.

-6- Het vervangen van een defect item door een werkend item (indien dit voorhanden is) kost geen tijd.

Het vervangen van een defect item door een werkend item kost natuurlijk altijd tijd.
Stel het verwisselen van LRU j duurt $vt_j$ dagen. Per dag worden gemiddeld $d_j$ LRU's vervangen in N systemen. Per systeem (bijv. F-16) wordt per dag $\Sigma_j$ $\{(d_j/N)*vt_j\}$ dagen besteed aan het verwisselen van LRU's.
De systeembeschikbaarheid is dan:

$$A = A\ (\text{METRIC}) * (1-\Sigma_j\ \{(d_j/N)*vt_j\}\ )$$

-7- Er is geen onderlinge uitwisseling van reservedelen tussen bases: alle reservedelen komen van het depot.

Het onderling uitwisselen van reservedelen kan een aantrekkelijke optie zijn. Bijvoorbeeld als een andere basis dichterbij is dan het depot, of als het depot geen reservedelen meer heeft maar een andere basis wel.
Er zal hier een benadering worden gegeven voor het verwachte aantal naleveringen in het geval van onderlinge uitwisseling door te interpoleren tussen een boven-en ondergrens
In het geval dat de levertijd tussen bases onderling 0 is, kan er in plaats van I bases gesproken worden van 1 basis. Het aantal naleveringen in zo'n geval geeft een ondergrens aan voor het aantal naleveringen in

geval van onderlinge uitwisseling tussen de bases. In het geval dat de levertijd oneindig lang is, is de situatie gelijk aan die bij VARI-METRIC (of de andere behandelde modellen). Het aantal naleveringen in zo'n geval geeft een bovengrens aan voor het aantal naleveringen in geval van onderlinge uitwisseling. Het verwachte aantal naleveringen in het geval van onderlinge uitwisseling kan als volgt benaderd worden ([11]):

$$E(B) = \text{Ondergrens}(B) + F(\ \text{Bovengrens}(B) - \text{Ondergrens}(B)\ )$$

met $F = 1 - e^{-AT}$,
T is de levertijd bij onderlinge uitwisseling tussen bases,
A is een functie van de levertijd tussen basis en depot, de gemiddelde depot-reparatietijd en de gemiddelde vraag per dag op een basis.

-8- Reparatie op het depot begint onmiddellijk nadat het item op het depot aangekomen is.

Een soortgelijke voorwaarde is al behandeld onder -3-.

-9- De totale vraag over de verschillende bases volgt een bepaalde vraagverdeling.

Deze voorwaarde is noodzakelijk en kan niet gerelaxeerd worden.

-10- Elke storing in een LRU is te wijten aan slechts één SRU-storing.

Het is niet altijd zo dat een storing in een LRU door slechts één SRU wordt veroorzaakt. Het is gebleken (zie [10]) dat de huidige modellen uit de METRIC-familie een flinke overschatting van het aantal naleveringen geven in het geval dat een storing in een LRU veroorzaakt wordt door meerdere SRU-storingen.

In het laatste geval zijn er twee storingsdetectie-methoden mogelijk. Er zal hier uigelegd worden wat deze storingsdetectie-methoden inhouden.
Bij simultane storingsdetectie wordt ervan uitgegaan dat na een bepaalde LRU-testtijd alle kapotte SRU's bekend zijn. Bij sequentiële storingsdetectie is na een bepaalde LRU-testtijd de eerste defecte SRU bekend. Als er een reserve voorhanden is, kan de defecte SRU vervangen worden en het testen van de LRU kan verder gaan. Als er geen reserve voorhanden is moet gewacht worden op de levering van de SRU alvorens met het testen verder gegaan kan worden.
Volgens Sherbrooke [10] is het verwachte aantal naleveringen in het geval van sequentiële storingsdetectie groter dan bij simultane storingsdetectie ([10]). De vraag is nu welke van deze twee methoden de werkelijkheid het dichtst benaderd.

-11- Iedere SRU behoort tot slechts één LRU.

Stel dat een SRU in meerdere LRU's voorkomt. Bijvoorbeeld dat een fractie p van de SRU-vraag afkomstig is van LRU 1 en een fractie 1-p van LRU 2. Dan geldt dat de SRU-naleveringen in dezelfde verhouding over de LRU's verdeeld kunnen worden. De naleveringen van het SRU als deel van LRU 1 is fractie p van de totale SRU-naleveringen en aan LRU 2 wordt 1-p van de totale SRU-naleveringen toegewezen.

## 10 SLOTWOORD

Deze rapportage heeft plaats gevonden naar aanleiding van het volgen van de cursus 'Spares management and modelling' in het kader van het project 'Voorstudie naar beheersing van materieel-logistieke processen' (A88KLu624).
In deze cursus is aan logistiek analisten een beeld gegeven van voorraadbeheersingsmodellen van repareerbare reservedelen zoals METRIC. Het doel van dit rapport is om geïnteresseerden in voorraad-beheersingsmodellen van repareerbare reservedelen snel bekend te maken met METRIC en aanverwante methoden. Overigens zonder dat er een waarde-oordeel over de behandelde methoden wordt gegeven.

De volgende betrokken personen verklaren zich akkoord met de inhoud van dit rapport.

| | |
|---|---|
| Drs. D.J. Stolk | Ir. M.H. Franssen |
| (Projectleider) | (Auteur) |

LITERATUUR

[1] An approximation to the stationary distribution of a multi-echelon repairable-item inventory system with finite source and repair channels,
Albright S.C.,
Naval Research Logistics, Vol. 36, 179-195, 1989.

[2] Markovian multi-echelon repairable inventory system,
Albright S.C. & Soni A.,
Naval Research Logistics, Vol. 35, 49-61, 1988.

[3] An optimization technique to determine the quantity of spare parts to buy during initial or phased procurements assuming a multi-indenture and multi-echelon setting,
Audet F.,
Department of National Defence, Canada,
December 1984.

[4] Dyna-METRIC: Dynamic multi-echelon technique for recoverable item control,
Hillestadt R.J.,
RAND-corporation, R-2785-AF,
Santa Monica, California, Juli 1982.

[5] A handbook of supply inventory models,
Hood W.C.,
Air Force Institute of Technology, Ohio,
September 1987.

[6] A model for a multi-item, multi-echelon, multi-indenture inventory system,
Muckstadt J.A.,
Management Science 20, 472-481, 1973.

[7] METRIC: a multi-echelon technique for recoverable item control,
Sherbrooke C.C.,
Operarions Research 16, 122-141, 1968.

[8] VARI-METRIC: improved approximations for multi-indenture, multi-echelon availability models,
Sherbrooke C.C.,
Operations Research Vol. 34, No.2, 311-319, 1986.

[9] Evaluation of demand prediction techniques,
Sherbrooke C.C.,
Logistics Management Institute, Report AF601R1,
March 1987.

[10] Backorder estimation under multiple failures of lower indenture items: a technical note,
Sherbrooke C.C.,
Logistics Management Institute, Report AF801R1,
September 1988.

[11] Spares management and modelling,
Sherbrooke C.C.,
overheadsheets en aantekeningen van de cursus,
Exeter (GB), September 1989.

[12] Wachtrijtheorie,
van de Wal J.,
Voorlopig collegedictaat TUE,
1986/1987.

## BIJLAGE A: DE STELLING VAN PALM

De stelling van Palm luidt:
wanneer de vraag naar een bepaald item Poisson-verdeeld is en er geen capaciteitsbeperkingen voor de reparatie zijn, is het aantal items in reparatie ook Poisson-verdeeld, onafhankelijk van de reparatieduur-verdeling.

Dit is vergelijkbaar met de volgende situatie in de wachtrijtheorie: wanneer de tussenaankomsttijden van klanten aan de loketten negatief exponentieel verdeeld is en er zijn oneindig veel loketten dan is het aantal klanten aan de loketten (in service) Poisson-verdeeld onafhankelijk van de bedieningsduur-verdeling. In wachtrijtheorienotatie(*): het aantal klanten dat bediend wordt in een $M|G|\infty$-wachtrij is Poisson-verdeeld.
Allereerst zal aangetoond worden dat het aantal klanten 'in-service' in een $M|M|\infty$ en $M|D|\infty$ wachtrij Poisson-verdeeld is en daarna zal aangegeven worden hoe de bewijsvoering verloopt als de bedieningsduurverdeling willekeurig kan zijn.

$M|M|\infty$ :
De verdeling van het aantal klanten in het systeem wordt vastgelegd door de overgangskansen van de toestanden. De toestanden worden gekarakteriseerd door het aantal klanten in het systeem.
De aankomstintensiteit is $\lambda$ (METRIC: de gemiddelde vraag per tijdseenheid naar een bepaald item), dus de gemiddelde tussen-

(*) De gebruikte notatie is de notatie van Kendall. Hiermee kan beknopt een aantal wachrijmodellen getypeerd worden. De notatie is meestal van de vorm $A|B|c$. De hoofdletters A en B typeren de tussenaankomsttijdverdeling en de bedieningstijdverdeling, c is het aantal servers/loketten. Op de plaats van A en B kunnen aangetroffen worden: M (Markov, bedieningstijd is negatief exponentieel verdeeld), D (deterministisch), G (general, algemeen). ([12]).

aankomsttijd is $1/\lambda$. De gemiddelde bedieningsduur is $1/\mu$ (METRIC: de gemiddelde reparatieduur).
Het aantal overgangen per tijdseenheid van toestand k-1 naar k is in een evenwichtssituatie gelijk aan het aantal overgangen per tijdseenheid van toestand k naar k-1 dus

$$\lambda \cdot p_{k-1} = \mu \cdot k \cdot p_k,$$

zodat

$$p_k = \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} \cdot p_0 = \frac{\rho^k}{k!} p_0$$

waarbij $p_k$ de kans is dat het systeem zich in toestand k bevindt. ($\rho$ is de hoeveelheid werk die per tijdseenheid arriveert.)
Omdat $\Sigma\, p_k = 1$ geldt $p_0 = e^{-\rho}$ en:

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot e^{-\rho} \quad k = 0,1,\ldots$$

$M|D|\infty$ :
Laat b de benodigde servicetijd zijn. De kans dat er op een willekeurig moment $t > b$ precies k klanten in het systeem zijn is gelijk aan de kans dat er tussen t en t-b precies k klanten zijn binnengekomen, dus (aankomstintensiteit is $\lambda$):

$$p_k = \frac{(\lambda b)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda b} = \frac{\rho^k}{k!} \cdot e^{-\rho} \quad k = 0,1,\ldots$$

Met $\rho = \lambda b$ de hoeveelheid werk die per tijdseenheid aankomt.

$M|G|\infty$ :

Zie de stroom van aankomende klanten niet als één Poisson-stroom met intensiteit $\lambda$ en bedieningstijdverdeling F, maar als de som van r onafhankelijke Poisson-stromen met intensteiten $\lambda q_1, \lambda q_2, \ldots, \lambda q_r$ en deterministische bedieningstijd $b_1, \ldots, b_r$, waarbij $q_i$ de kans is dat een klant bedieningsduur $b_i$ heeft (van soort i is) voor $i=1,\ldots,r$.
Aangezien het aantal loketten onbeperkt is, geldt voor elke soort een evenwichtsverdeling van een $M|D|\infty$-wachtrij, zoals hierboven afgeleid.
Voor soort i geldt ($p_{i,k}$ is de evenwichtskans op k klanten van soort i in het systeem):

$$p_{i,k} = \frac{(\rho_i)^k}{k!} \cdot e^{-\rho_i} \ , \ k = 0,1,\ldots \ , \ \rho_i = \lambda \cdot q_i \cdot b_i$$

De verschillende klantsoorten zijn onafhankelijk en daardoor geldt:

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot e^{-\rho}, \quad k = 0,1,\ldots \text{ met } \rho = \sum_{i=1}^{r} \rho_i = \sum_{i=1}^{r} \lambda \cdot q_i \cdot b_i$$

$$\text{en } p_k = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_r} p(k_1, k_2, \ldots, k_r)$$

$$\text{met } \sum_{i=1}^{r} k_i = k$$

waarbij $p(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ de kans is op $k_1$ klanten van soort 1 plus $k_2$ klanten van soort 2 enzovoorts.
Dus voor de $M|G|\infty$-wachtrij met discrete bedieningstijdverdeling op een eindig aantal punten heeft de evenwichtsverdeling dezelfde eenvoudige vorm als de $M|M|\infty$-wachtrij en de $M|D|\infty$-wachtrij.
Het is ook mogelijk het bovenstaande af te leiden voor een discrete bedieningsduurverdeling op aftelbaar veel punten. Tenslotte is het een kwestie van techniek om aan te tonen dat het resultaat ook geldt voor

een willekeurige verdelingsfunctie. Voor een iets uitgebreidere afleiding zie [12].

REPORT DOCUMENTATION PAGE (MOD-NL)

| | | |
|---|---|---|
| 1. DEFENSE REPORT NUMBER (MOD-NL)<br>TD90-0044 | 2. RECIPIENT'S ACCESSION NUMBER | 3. PERFORMING ORGANIZATION REPORT NUMBER<br>FEL-90-A078 |
| 4. PROJECT/TASK/WORK UNIT NO.<br>20464 | 5. CONTRACT NUMBER<br>A88/KLU/624 | 6. REPORT DATE<br>AUGUST 1990 |
| 7. NUMBER OF PAGES<br>39 (incl. appendices) | 8. NUMBER OF REFERENCES<br>12 | 9. TYPE OF REPORT AND DATES COVERED<br>FINAL REPORT |

10. TITLE AND SUBTITLE

METHODEN VOOR VOORRAADBEHEERSING VAN REPAREERBARE RESERVEDELEN: METRIC EN ENKELE VARIANTEN.

METHODES FOR REPAIRABLE ITEM INVENTORY CONTROL: METRIC AND SOME VARIANTS

11. AUTHOR(S)

IR.M.H. FRANSSEN

12. PERFORMING ORGANIZATION NAME(S) AND ADDRESS(ES)

TNO PHYSICS AND ELECTRONIC LABORATORY,

P.O. BOX 96864, 2509 JG THE HAGUE, THE NETHERLANDS

13. SPONSORING/MONITORING AGENCY NAME(S)

ROYAL NETHERLANDS AIR FORCE

BINCKHORSTLAAN 135, 2516 BA, 'S-GRAVENHAGE

14. SUPPLEMENTARY NOTES


15. ABSTRACT (MAXIMUM 200 WORDS, 1044 POSITIONS)

WITHIN THE SCOPE OF AN ORIENTATION ON MATERIEL-LOGISTICAL PROCESSES WITHIN THE RNLAF THE COURSE "SPARES MANAGEMENT AND MODELLING" BY DR. C.C. SHERBROOKE HAS BEEN ATTENDED THIS COURSE DEALT WITH INVENTORY CONTROL METHODS FOR REPAIRABLE ITEMS, BASED ON METRIC (MULTI-ECHELON TECHNIQUE FOR RECOVERABLE INVENTORY CONTROL).

E PURPOSE OF THIS REPORT IS TO GIVE THE READER AN INSIGHT IN METRIC AND SOME OF ITS VARIANTS. IT ALSO POINTS OUT A FEW POSSIBLE FURTHER EXTENSIONS.


| 16. DESCRIPTORS | IDENTIFIERS |
|---|---|
| INVENTORY CONTROL | METRIC |
| RECOVERABLE ITEM | |
| SPARE PART | |
| MANAGEMENT | |

| | | |
|---|---|---|
| 17a. SECURITY CLASSIFICATION (OF REPORT)<br>UNCLASSIFIED | 17b. SECURITY CLASSIFICATION (OF PAGE)<br>UNCLASSIFIED | 17C. SECURITY CLASSIFICATION (OF ABSTRACT)<br>UNCLASSIFIED |
| 18. DISTRIBUTION/AVAILABILITY STATEMENT<br>UNLIMITED AVAILABILITY | | 17d. SECURITY CLASSIFICATION (OF TITLES)<br>UNCLASSIFIED |